Professor: Jardel Almeida							
01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**
C	A	C	C	B	C	A	A
09	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	
B	C	D	D	A	B	C	

1. A ordenada do ponto B é tal que $y_B = f(0) = 1$. Logo, devemos impor

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+1)(x-2) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, sendo $x_A = -1$ e $x_C = 2$, temos
$d(A, C) = x_C - x_A = 3$.

2. Sendo $f(1) = a + 2$, temos

$$\begin{aligned} f(f(1)) = 1 &\Leftrightarrow f(a+2) = 1 \\ &\Leftrightarrow a(a+2) + 2 = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -1. \end{aligned}$$

3. Seja $h(x) = -|x|$, com $0 \le x \le 3$. O gráfico da função **g**, cuja lei é $g(x) = -|x-1|$, para $0 \le x \le 3$, corresponde ao gráfico de **h** deslocado de uma unidade no sentido positivo do eixo das abscissas.
Assim, o gráfico de ***f*** corresponde ao gráfico da função deslocado de uma unidade no sentido positivo do eixo das ordenadas e, portanto, temos $f(x) = -|x-1| + 1$, com $0 \le x \le 3$.

Finalmente, sendo

$$\begin{aligned} y &= [f(x)]^2 \\ &= (-|x-1| + 1)^2 \\ &= |x-1|^2 - 2|x-1| + 1 \\ &= \begin{cases} (x-2)^2, \text{ se } x \ge 1 \\ x^2, \text{ se } x < 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

podemos afirmar que o gráfico de $y = [f(x)]^2$, para $0 \le x \le 3$, é o da alternativa [C].

4. Desde que $h(0) = 2^1 = 2$, temos $h(2) = \sqrt{2-1} = 1$ e, portanto, vem $h(1) = 2^{1+1} = 4$.

Portanto, a resposta é $h(h(h(0))) = h(h(2)) = h(1) = 4$.

5. Calculando:
$x = 0$
$0 \cdot f(0-1) = (0-3) \cdot f(0) + 3 \to f(0) = 1$
$x = 1$
$1 \cdot f(1-1) = (1-3) \cdot f(1) + 3 \to f(0) = -2 \cdot f(1) + 3 \to f(1) = 1$

6. Tem-se que $(a, b, c) = (a, aq, aq^2)$, com $a \neq 0$ e **q** sendo a razão da progressão geométrica.

Desse modo, vem

$$\frac{s}{a} = \frac{a + aq + aq^2}{a} = q^2 + q + 1 = \left(q + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Portanto, o valor mínimo de $\frac{s}{a}$ é $\frac{3}{4}$, ocorrendo para $q = -\frac{1}{2}$.

7. Tem-se que

$$\begin{aligned} \log_2 y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x &\Leftrightarrow y = 2^{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x} \\ &\Leftrightarrow y = 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}\log_2 x} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\log_2 x^{\frac{2}{3}}} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

8. Pondo $f(x) = g(x)$, temos

$$\begin{aligned} c + x^2 = x &\Leftrightarrow x^2 - x + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - c. \end{aligned}$$

Os gráficos de ***f*** e de **g** se intersectam se, e somente se, a equação acima possuir raízes reais. Logo, sabendo que $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ para todo **x** real, devemos ter $\frac{1}{4} - c \ge 0$, ou seja, $c \le \frac{1}{4}$.

9. $f(g(2)) = f\left(1 + \log_{\frac{1}{2}} 2\right) = f(1-1) = f(0) = 4$

$g(f(2)) = g\left(2^2 + 4\right) = g(8) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 1 - 3 = -2$

$h(2) = 3 \cdot f(g(2)) + 2 \cdot g(f(2)) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) \to h(2) = 8$

10. Determinando $m_0 = c \cdot a^{-k \cdot 0} \Leftrightarrow m_0 = c$

Como em 10 anos m_0 foi reduzido para 0,2 m_0, temos:

$0{,}2 \cdot m_0 = m_0 \cdot a^{-10k}$

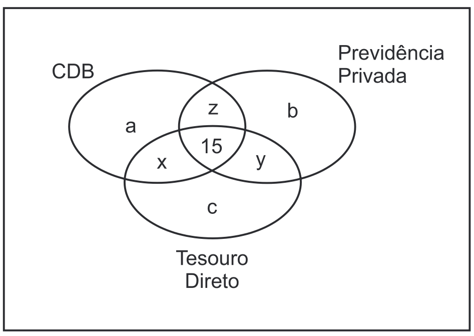
$a^{-10k} = \frac{1}{5}$

Em 10 anos:

$M(20) = m_0 \cdot a^{-20 \cdot k} = m_0 \cdot \left(a^{-10k}\right)^2 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}04 \cdot m_0$

Correspondendo a 4% de m_0.

11. De acordo com as informações do problema, podemos estabelecer os seguintes diagramas:



Podemos, também, elaborar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a+z+x+15=80 \\ b+z+y+15\%=55\% \\ x+y+c+15\%=25\% \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos:

$(a+b+c)+(x+y+z)+15\%+30\%+(x+y+z)=160$

$100\%+30\%+(x+y+z)=160$

$x+y+z=30\%$

12. Tem-se que

$$y=\frac{x}{1+x} \Rightarrow y+xy=x$$
$$\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}.$$

Assim, a inversa de $\boldsymbol{f}$ é $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ e, portanto, vem

$$f(k)+g(k)=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{k}{1+k}+\frac{k}{1-k}=\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}k^2+2k-\sqrt{3}=0$$
$$\Rightarrow k=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } k=-\sqrt{3}.$$

A resposta é $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

13. Tem-se que

$$f(0)=\frac{2^0}{1-0}=1.$$

Logo, vem

$$f(f(0))=f(1)$$
$$=\frac{\log(1^2)+2}{1}$$
$$=2.$$

14. Calculando:

$4(x+2)^2-12(x+2)+5<0$

$4x^2+16x+16-12x-24+5<0$

$4x^2+4x-3<0$

Raízes da equação $4x^2+4x-3=0$:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{8}=\frac{-4\pm 8}{8}$$

$$x=-\frac{3}{2} \text{ ou } x=\frac{1}{2}$$

Sendo assim, $f(g(x))<0$ para:

$$-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}$$

E o menor inteiro que satisfaz essa condição é $x=-1$.

15. Tem-se que

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}.$$

Assim, vem

$$\frac{1}{n+1}<0{,}02 \Leftrightarrow n+1>50$$
$$\Leftrightarrow n>49.$$

A resposta é $n=50$.