Professor: Robério Bacelar							
01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**
D	D	A	C	D	C	A	D
09	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	
C	C	C	D	C	B	B	

01.

$M_n = M_{n-1} \cdot M_1$

$M_{10} = M_9 \cdot M_1$

$M_9 = M_8 \cdot M_1$

E assim sucessivamente até M_{10}. Conclui-se, portanto, que: $M_{10} = (M_1)^{10}$

Fazendo essas multiplicações, têm-se:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Analisando-se o número situado na segunda linha e segunda coluna das matrizes calculadas, percebe-se a seguinte ordem: 1, 2, 3, 5, 8, … . Por conta da própria multiplicação de matrizes, tal elemento sempre é a soma dos dois anteriores. Ou seja, em M_3, ele será a soma de 1 + 2; em M_4, ele será a soma de 2 + 3 e assim por diante. Logo, pode-se prever o valor que ele assumirá em M_{10}:

$M_3 = 1 + 2 = 3$

$M_4 = 2 + 3 = 5$

$M_5 = 3 + 5 = 8$

$M_6 = 5 + 8 = 13$

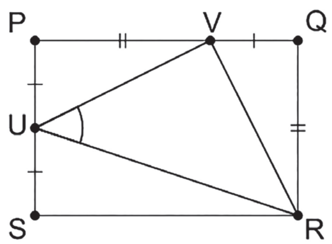
$M_7 = 8 + 13 = 21$

$M_8 = 13 + 21 = 34$

$M_9 = 31 + 34 = 55$

$M_{10} = 34 + 55 = 89.$

02. Considere a figura.

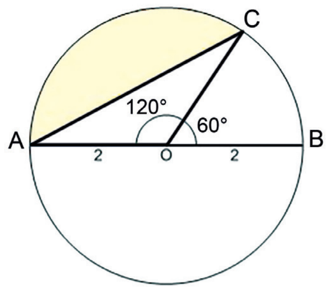


Sabendo que $\overline{VQ} = 1$ m e U é ponto médio de PS, temos $\overline{PV} = \overline{QR} = 2$ m e $\overline{PU} = 1$ m. Em consequência, os triângulos PVU e QRV são congruentes por LAL. Portanto, segue que $U\hat{V}R$ é reto e, assim, o triângulo VRU é retângulo isósceles. A resposta é $V\hat{U}R = 45°$.

03. Sabendo que $L_6 = \frac{\sqrt{3}}{3}r$ e $\ell_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, com **r** sendo o raio da circunferência, tem-se que a razão pedida é

$$\frac{\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\dfrac{3 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{8}.$$

04. De acordo com as informações do enunciado, a área pedida corresponde à região destacada na figura abaixo, ou seja, a área de um segmento circular de 120°.



$$A = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 120°}{360°} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}120° = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

05. Considerando que $2^{32} = x$, podemos escrever a divisão acima através de uma divisão de polinômios: $(x^2 + 1)$ por $(x + 1)$. O resto R da divisão de $x^2 + 1$ por $(x + 1)$ é o valor numérico de $x^2 + 1$ para $x = -1$ (Teorema do Resto), ou seja, $R = (-1)^2 + 1 = 2$.

06. Seja **n** o número de lados do polígono da base. Logo, sabendo que as faces laterais de uma pirâmide qualquer são triângulos, temos

$$180° \cdot (n - 2) + n \cdot 180° = 3\,600° \Leftrightarrow 2n - 2 = 20 \Leftrightarrow n = 11.$$

07. O número de comissões que podem ser formadas, independentemente do sexo de seus participantes, é $\binom{36}{3} = \frac{36!}{3! \cdot 33!} = 7\,140$. Desse total, devemos descontar o número de comissões cujos membros são todos homens e o número de comissões cujos membros são todos mulheres. O número de comissões formadas exclusivamente por mulheres é igual a $\binom{22}{3} = \frac{22!}{3! \cdot 19!} = 1\,540$. O número de comissões formadas apenas por homens é $\binom{14}{3} = \frac{14!}{3! \cdot 11!} = 364$. Portanto, o resultado pedido é igual a 7 140 – 1 540 – 364 = 5 236.

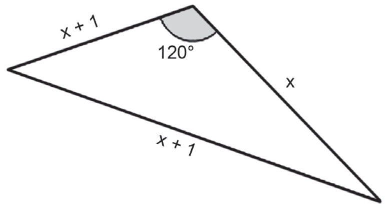
08. $\log y - \log x = \log z - \log y \Leftrightarrow \log\frac{y}{x} = \log\frac{z}{y} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y^2 = xz$$

09. $$\frac{1+3+5+...+2n-1}{2+4+6+...+2n}=\frac{2014}{2\,015}\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{1+2n-1}{2}\right)n}{\left(\frac{2+2n}{2}\right)n}=\frac{2\,014}{2\,015}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{n}{1+n}=\frac{2\,014}{2\,015}\Leftrightarrow n=2\,014$$

10. Sabemos que o maior lado de um triângulo é oposto ao seu maior ângulo. Podemos, então, aplicar o teorema dos cossenos no triângulo considerado no enunciado:



$(x + 1)^2 = x^2 + (x - 1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot \cos 120°$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 - 2 \cdot x \cdot (x - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - x$

$2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = \frac{5}{2}$

Portanto, o perímetro P do triângulo será dado por:

$P = x + x - 1 + x + 1 = 3x = 3 \cdot \frac{5}{2} = 7{,}5.$

11. Sabendo que o poliedro possui 32 vértices, tem-se V = 32. Por conseguinte, sendo F e A, respectivamente, o número de faces e o número de arestas, pelo Teorema de Euler, vem $V + F = A + 2 \Leftrightarrow 32 + F = A + 2 \Leftrightarrow F = A - 30$. Daí, como o poliedro possui apenas faces triangulares, temos $3F = 2A$ e, portanto, $3(A - 30) = 2A \Leftrightarrow A = 90$.

12. Para que o produto dos quatro números escolhidos seja positivo, só existem 3 possibilidades:
1. Os quatro números escolhidos são positivos;
2. Os quatro números escolhidos são negativos;
3. Dois números escolhidos são positivos e dois são negativos.

Sabendo disso, e sabendo que a ordem dos números escolhidos não interfere no seu produto, podemos calcular as combinações. Os casos 1 e 2 são idênticos, ou seja, sua combinação é:

$$C_6^4=\frac{6!}{4!(6-4)!}=\frac{6\cdot5\cdot4!}{4!\cdot2!}=\frac{30}{2}=15$$

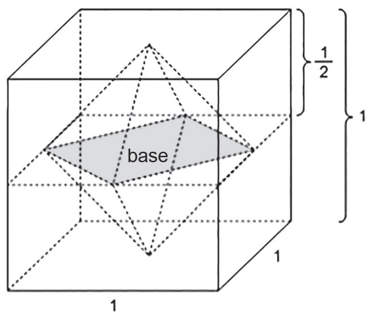
Já o caso 3 pode ser calculado como sendo a combinação de 6 elementos 2 a 2 (para os dois números positivos) e a combinação de 6 elementos 2 a 2 (para os dois números negativos). Ou seja:

$$C_6^2=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{6\cdot5\cdot4!}{2!\cdot4!}=\frac{30}{2}=15$$

$$C_6^2\cdot C_6^2=15\cdot15=225$$

Somando-se as três possibilidades, tem-se: 15 + 15 + 225 = 255 formas de escolher quatro elementos de X, de modo que o produto destes elementos seja um número positivo.

13.



O poliedro considerado é um octaedro regular, seu volume será a soma dos volumes de duas pirâmides, representadas na figura acima.

$$V=2\cdot\frac{1}{3}\cdot A_b\cdot h=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

14. Sejam **a**, aq e aq², com q > 1, as medidas dos lados do triângulo. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, vem

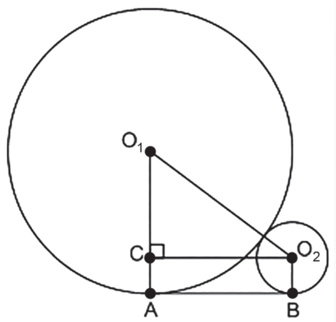
$$(aq^2)^2=(aq)^2+a^2\Rightarrow q^4-q^2=1$$

$$\Rightarrow\left(q^2-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow q^2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\Rightarrow q=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

15. Considere a figura, em que O_1 e O_2 são os centros das esferas.



Queremos calcular $\overline{AB}=\overline{CO_2}$.

Sejam $r_1=\overline{AO_1}$ e $r_2=\overline{BO_2}$ os raios das esferas. Assim, temos $\frac{4}{3}\pi r_1^3=2\,304\pi\Leftrightarrow r_1=12$ m e $\frac{4}{3}\pi r_2^3=36\pi\Leftrightarrow r_2=3$ m.

Considerando o triângulo retângulo O_1CO_2, segue que $\overline{O_1O_2}=r_1+r_2=15$ m e $\overline{CO_1}=r_1-r_2=9$ m.

Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\overline{O_1O_2}^2=\overline{CO_1}^2+\overline{CO_2}^2\Leftrightarrow15^2=9^2+\overline{CO_2}^2$$

$$\Rightarrow\overline{CO_2}=12\text{ m}.$$